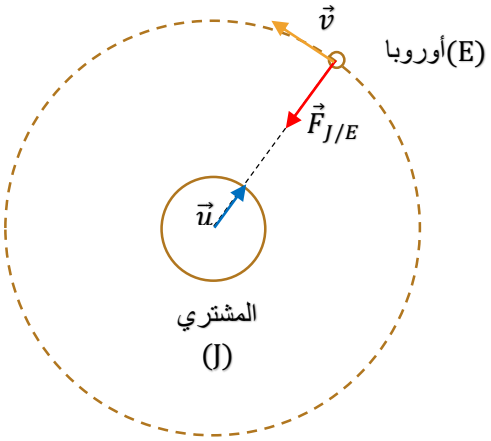
تصحيح مقترح للتمرين رقم 05 — مستوى الصعوبة: ⭐



1. **الشكل التوضيحي:**

2. **العبارة الشعاعية للقوة $\vec{F}_{J/E}$:**

$$\vec{F}_{J/E} = -G.\frac{M_E \times M_J}{r^2}.\vec{u}$$

3. **إثبات أن الحركة منتظمة:**

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_E.\vec{a}_E$$

ومنه:

$$-G.\frac{M_E \times M_J}{r^2}.\vec{u} = M_E.\vec{a}_E$$

إذن:

$$\vec{a}_E = -G.\frac{M_J}{r^2}.\vec{u} \dots (1)$$

منه نستنتج أن تسارع الحركة ثابت.

ومن جهة أخرى لدينا، عبارة التسارع في معلم فريني:

$$\vec{a}_E = \frac{dv}{dt}.\vec{t} - \frac{v^2}{r}.\vec{u} \dots (2)$$

بمطابقة العبارتين (1) و(2)، نجد:

$$\begin{cases} \vec{a}_E = \vec{a}_n = -\dfrac{v^2}{r}.\vec{u} \\ \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

منه نستنتج أن $v = C^{ste}$ ، إذن حركة القمر E هي حركة منتظمة.

4. **كتابة عبارة السرعة v:**

لدينا:

$$\begin{cases} \vec{a}_E = -\dfrac{v^2}{r}.\vec{u} \\ \vec{a}_E = -G.\dfrac{M_J}{r^2}.\vec{u} \end{cases}$$

ومنه:

$$\frac{v^2}{r} = G.\frac{M_J}{r^2}$$

إذن:

$$v = \sqrt{G.\frac{M_J}{r}}$$

تطبيق عددي:

$$v = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}.\frac{1{,}9 \times 10^{27}}{6{,}7 \times 10^{5} \times 10^{3}}} = \mathbf{1{,}38 \times 10^{4}\ m.s^{-1}}$$

5. **استنتاج عبارة الدور T:**

نعلم أن:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 6{,}7 \times 10^{5} \times 10^{3}}{1{,}38 \times 10^{4}} = \mathbf{3{,}06 \times 10^{5}\ s}$$

6. **اثبات القانون الثالث لكبلر:**

لدينا سابقا:

$$\begin{cases} T = \dfrac{2\pi r}{v} \\ v = \sqrt{G.\dfrac{M_J}{r}} \end{cases}$$

منه:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_J}}$$

بتربيع العبارة السابقة نجد:

$$T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{G.M_J}$$

إذن:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$$

7. **تحديد نصف القطر r_{Io}:**

لدينا:

$$\frac{{T_{Io}}^2}{{r_{Io}}^3} = \frac{T^2}{r^3}$$

ومنه:

$$r_{Io} = r.\sqrt[3]{\frac{{T_{Io}}^2}{T^2}} = 6{,}7 \times 10^{5} \times \sqrt[3]{\frac{(42 \times 3600 + 18 \times 60)^2}{(3{,}05 \times 10^{5})^2}} = \mathbf{4{,}22 \times 10^{5}\ km}$$